模块一 立体图形的结构探究

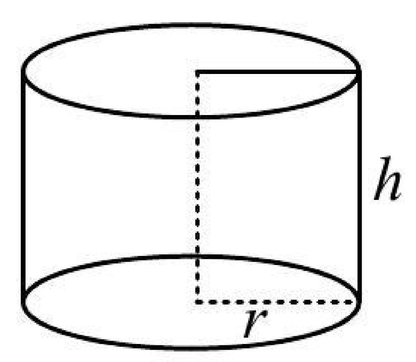
第 1 节 几何体的表面积与体积（★★）

强化训练

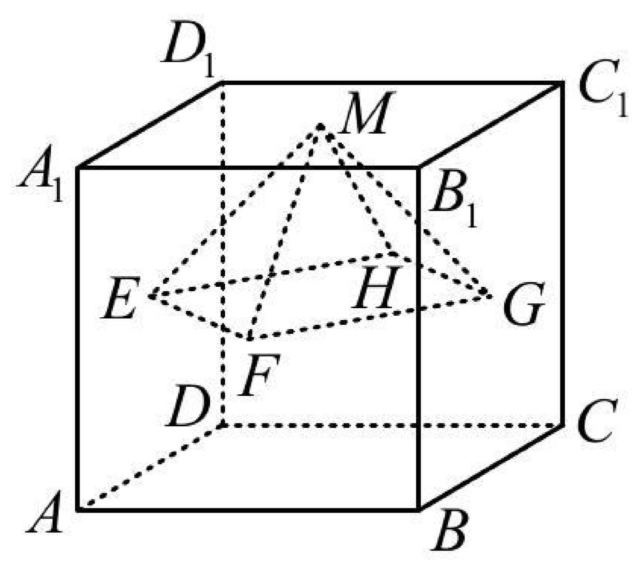
1．（2022 • 上海卷 • ★）已知圆柱的高为 4，底面积为9π，则圆柱的侧面积为_____.

答案： 24π

解析： 如图，由题意，$h=4$，底面积$S=\pi r^2=9\pi\Rightarrow r=3$，所以圆柱的侧面积为$2\pi rh=24\pi$.

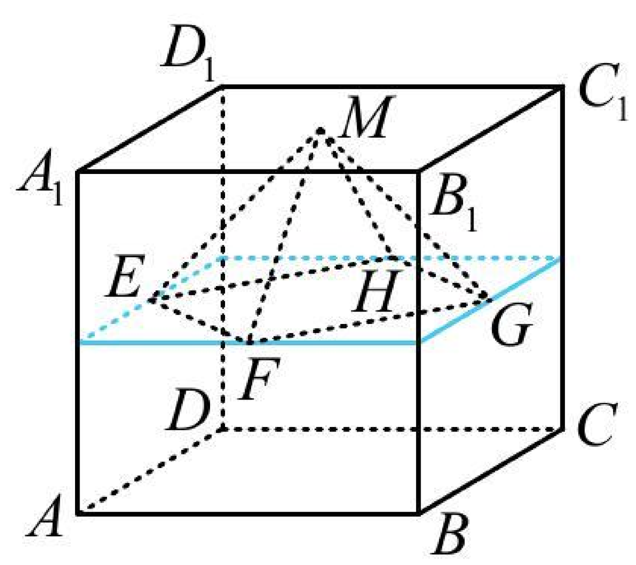


2．（2018 • 天津卷 • ★★）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 1，除面$ABCD$外，该正方体其余各面的中心分别为点E，F，G，H，M（如图），则四棱锥$M-EFGH$的体积为_____.



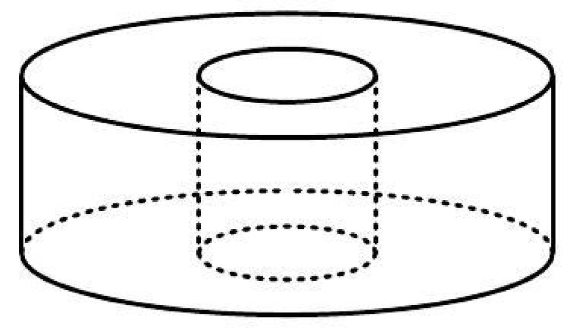
答案： $\dfrac{1}{12}$

解析： 由题意，四棱锥$M-EFGH$的高为$\dfrac{1}{2}$，底面是由如图所示的蓝色正方形各边中点连线而成的正方形，其边长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$V_{M-EFGH}=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.



3．（2023 • 武汉模拟 • ★★）某车间需要对一个圆柱形工件进行加工，该工件底面半径为 15cm，高 10cm，加工方法为在底面中心处打一个半径为$r$cm 的且和原工件有相同轴的圆柱形通孔，如图，若要求工件加工后的表面积最大，则r的值应设计为（　　）

（A）$\sqrt{10}$　　（B）$\sqrt{15}$　　（C）4　　（D）5

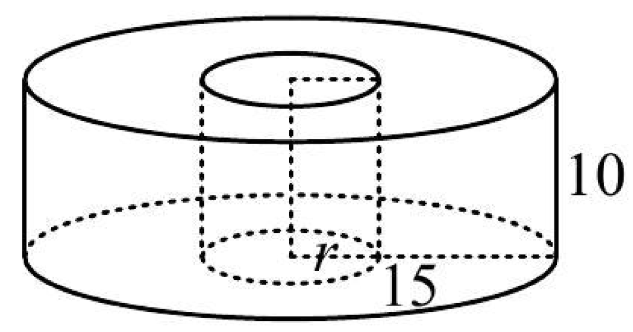


答案：D

解析：加工后的工件表面积由四部分组成：上下底面（大圆减小圆），大圆柱侧面，小圆柱侧面，

如图，加工后的表面积 $S=2(\pi\cdot 15^2-\pi r^2)+2\pi\cdot 15\times 10+2\pi r\cdot 10=750\pi-2\pi r^2+20\pi r=750\pi-2\pi[(r-5)^2-25]$，

所以当 $r=5$ 时，S 取得最大值.



4．（2021・新高考Ⅱ卷改编・★★★）正四棱台的上、下底面的边长分别为2，4，侧棱长为2，则其体积为_____；侧面积为_____.

答案：$\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$；$12\sqrt{3}$

解析：要算正四棱台的体积，还差高，已知侧棱长，可在包含侧棱的截面 BDD_1B_1 中来分析，

如图，作 $B_1E\perp BD$ 于 E，$D_1F\perp BD$ 于 F，则 B_1E，D_1F 均为正四棱台的高，

由题干所给数据可求得 $BD=4\sqrt{2}$，$B_1D_1=2\sqrt{2}$，所以 $EF=B_1D_1=2\sqrt{2}$，$BE=DF=\dfrac{1}{2}(BD-EF)=\sqrt{2}$，

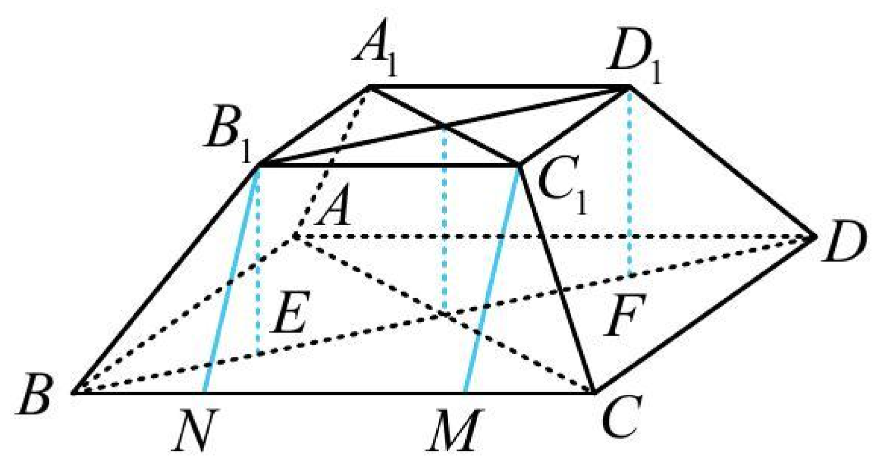
从而 $B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{2}$，故正四棱台的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times(2\times 2+4\times 4+\sqrt{2\times 2\times 4\times 4})\times\sqrt{2}=\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$；

再算侧面积，侧面为四个全等的等腰梯形，上底和下底已知，还差高，故先算高，

如图，作 $C_1M\perp BC$ 于 M，$B_1N\perp BC$ 于 N，则 $MN=B_1C_1=2$，

$CM=BN=\dfrac{1}{2}(BC-MN)=1$，$B_1N=\sqrt{BB_1^2-BN^2}=\sqrt{3}$，

所以等腰梯形 BCC_1B_1 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，故四棱台的侧面积 $S=4\times 3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.



5．（2022・天津模拟・★★★）两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 S_1 和 S_2，体积分别为 V_1 和 V_2，若 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$（　　）

（A）$\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$　（B）$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$　（C）$\dfrac{9}{4}$　（D）$\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$

答案：A

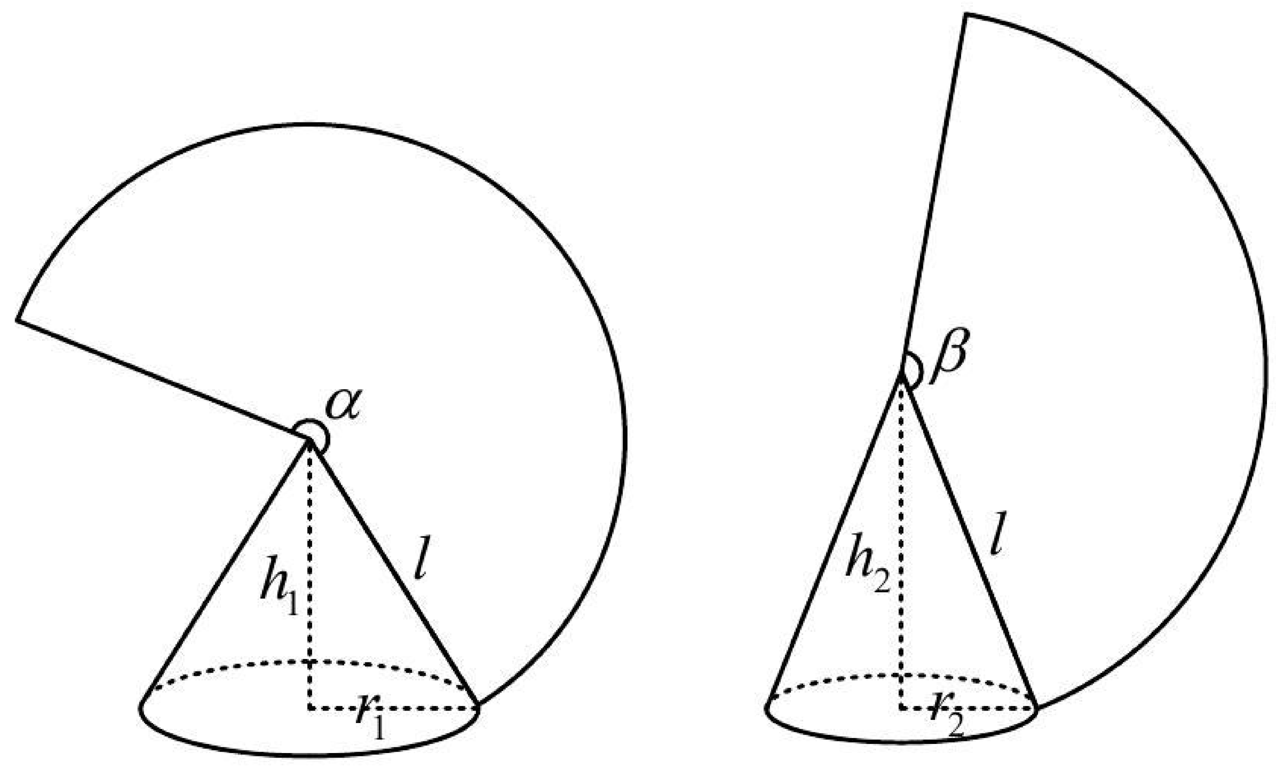
解析：两个圆锥及其侧面展开示意图如图，要研究体积之比，需分析关键参数（底面半径和高）的比值关系，

由题意，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l}=\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{3}{2}$，不妨设 $r_1=3m$，$r_2=2m$，

只需把两个圆锥的高也用 m 表示，就能算$\dfrac{V_1}{V_2}$了，还有侧面展开图圆心角之和为2π 这个条件没用，

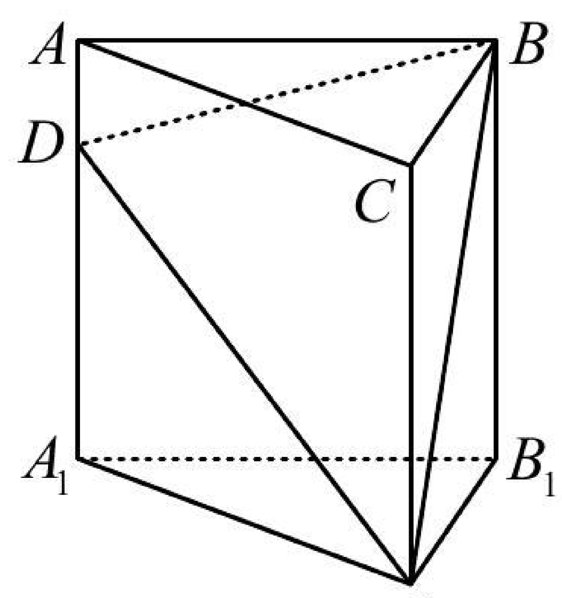
设两个圆锥的侧面展开图的圆心角分别为α，β，则$\begin{cases}\alpha l=2\pi r_1\\ \beta l=2\pi r_2\end{cases}\Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{2\pi r_1}{l}+\dfrac{2\pi r_2}{l}=2\pi\Rightarrow l=r_1+r_2=5m$，

所以$h_1=\sqrt{l^2-r_1^2}=4m$，$h_2=\sqrt{l^2-r_2^2}=\sqrt{21}m$，故$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}=\dfrac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2}=\dfrac{9m^2\cdot 4m}{4m^2\cdot\sqrt{21}m}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.



6.（2023 •湖南娄底模拟 •★★★）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面ABC，$AB=BC=AC=AA_1$，点 D 是棱AA_1上的点，且$AA_1=4AD$，若截面BDC_1分这个棱柱为上、下两部分，则上、下两部分的体积比为（　　）

（A）1:2　　（B）4:5　　（C）4:9　　（D）5:7



答案：D

解析：虽然上部分体积不易求，但观察发现下部分是以C_1为顶点的四棱锥，体积易求，故先求下部分的体积，

如图，取A_1B_1中点E，连接C_1E，由题意，$\Delta A_1B_1C_1$是正三角形，所以$C_1E\perp A_1B_1$，

又$AA_1\perp$平面ABC，所以$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，从而$AA_1\perp C_1E$，故$C_1E\perp$平面ABB_1A_1，

不妨设$AB=BC=AC=AA_1=4$，则$C_1E=2\sqrt{3}$，由$AA_1=4AD$可得$A_1D=3$，

所以下部分的体积$V_{下}=\dfrac{1}{3}S_{A_1B_1BD}\cdot C_1E=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(3+4)\times 4\times 2\sqrt{3}=\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$，

再算上部分的体积，可用三棱柱的体积减去下部分的体积，

三棱柱的体积 $V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=16\sqrt{3}$，

所以上部分的体积 $V_{上}=V-V_{下}=16\sqrt{3}-\frac{28\sqrt{3}}{3}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$，

故 $V_{上}:V_{下}=\frac{20\sqrt{3}}{3}:\frac{28\sqrt{3}}{3}=5:7$.